Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 8 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

В школьном чемпионате по баскетболу каждая игра состоит из 4 таймов по 12 минут, при этом в каждый момент на площадке должно быть ровно 5 игроков. Тренер делал замены так, что всего на площадке побывало 9 игроков и все, кроме капитана, находились на площадке равное время, а капитан — вдвое больше. Сколько времени провёл на площадке игрок, не являющийся капитаном? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 24

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что игра идёт 48 минут. Так как на поле всегда 5 игроков, то за игру пройдёт $48 \cdot 5 = 240$ человеко-минут. Пусть обычный игрок провёл на площадке x минут, тогда капитан был на поле $2x$ минут, а все игроки вместе — $10x$ минут. Тогда $10x = 240$, $x = 24$.

Задание № 1.2

Условие:

В школьном чемпионате по баскетболу каждая игра состоит из 4 таймов по 11 минут, при этом в каждый момент на площадке должно быть ровно 5 игроков. Тренер делал замены так, что всего на площадке побывало 10 игроков и все, кроме капитана, находились на площадке равное время, а капитан — вдвое больше. Сколько времени провёл на площадке игрок, не являющийся капитаном? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 20

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

В школьном чемпионате по баскетболу каждая игра состоит из 4 таймов по 18 минут, при этом в каждый момент на площадке должно быть ровно 5 игроков. Тренер делал замены так, что всего на площадке побывало 14 игроков и все, кроме капитана, находились на площадке равное время, а капитан — вдвое больше. Сколько времени провёл на площадке капитан? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 48

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

В школьном чемпионате по баскетболу каждая игра состоит из 3 таймов по 16 минут, при этом в каждый момент на площадке должно быть ровно 5 игроков. Тренер делал замены так, что всего на площадке побывало 11 игроков и все, кроме капитана, находились на площадке равное время, а капитан — вдвое больше. Сколько времени провёл на площадке капитан? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Траектория полёта самолёта всегда представляет собой отрезок прямой. От города А до города Б самолёт держал курс, отклоняясь от северного направления на 18 на восток. Из города Б он полетел в город В, отклоняясь от северного направления на 44 на запад. Известно, что расстояния от А до Б и от Б до В равны и составляют по 300 км.

Заполните пропуски.

Если самолёт летит напрямую из А в В, то направление его движения отклоняется от северного на…

Ответ: 13

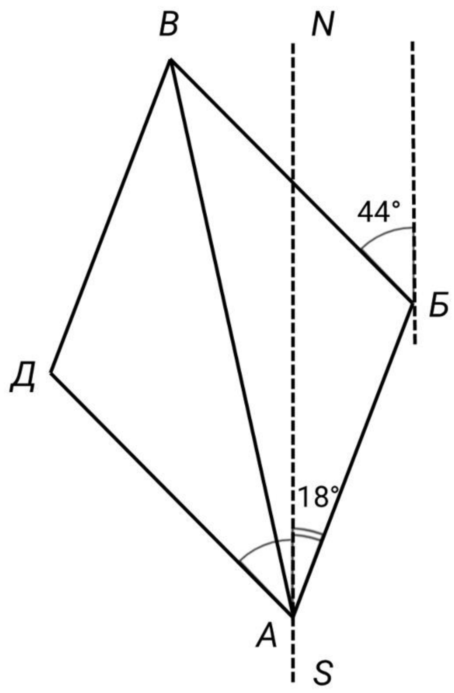
- ✓ к западу
- o к востоку

Точное совпадение ответа — 1 балл

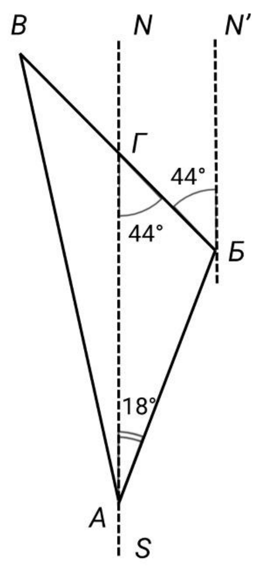
Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Первый способ. Обозначим через N – S направление Север – Юг. Обозначим углы, которые нам даны, на рисунке. Так как треугольник АБВ равнобедренный, то достроим его до ромба АБВД. Тогда прямая ДА параллельна ВБ, и $\angle$ДАN = 44, а значит, $\angle$ДАБ = 44°+18° = 6°2. Так как в ромбе диагонали являются биссектрисами, то $\angle$ВАБ = 62°÷ 2 = 31°, откуда получаем, что искомый угол $\angle$BAN = 31 − 18 = 13°.



<u>Второй способ.</u> Обозначим через N – S направление Север – Юг. Обозначим углы, которые нам даны, на рисунке. Обозначим за Г точку пересечения отрезка ВБ и направления север-юг. Тогда ∠АГБ = 44 как накрест лежащий. Тогда из суммы углов треугольника АГБ получаем, что ∠Б = 180° – 18°– 44°= 118°. Заметим, что треугольник ВБА — равнобедренный по условию, поэтому ∠А = (180°–118°) ÷ 2 = 31°, а значит, искомый угол (между АВ и направлением север – юг) составляет 31°– 18°=13°.



Задание № 2.2

Условие:

Траектория полёта самолёта всегда представляет собой отрезок прямой. От города А до города Б самолёт держал курс, отклоняясь от северного направления на 15 на восток. Из города Б он полетел в город В, отклоняясь от северного направления на 27 на запад. Известно, что расстояния от А до Б и от Б до В равны и составляют по 600 км.

Заполните пропуски.

Если самолёт летит напрямую из А в В, то направление его движения отклоняется от северного на…

Ответ: 6

- ✓ к западу
- ○ к востоку

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Траектория полёта самолёта всегда представляет собой отрезок прямой. От города А до города Б самолёт держал курс, отклоняясь от северного направления на 20 на восток. Из города Б он полетел в город В, отклоняясь от северного направления на 36 на запад. Известно, что расстояния от А до Б и от Б до В равны и составляют по 450 км.

Заполните пропуски.

Если самолёт летит напрямую из А в В, то направление его движения отклоняется от северного на…

Ответ: 8

- ○ к западу
- ✓ к востоку

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Траектория полёта самолёта всегда представляет собой отрезок прямой. От города А до города Б самолёт держал курс, отклоняясь от северного направления на 33 на восток. Из города Б он полетел в город В, отклоняясь от северного направления на 17 на запад. Известно, что расстояния от А до Б и от Б до В равны и составляют по 500 км.

Заполните пропуски.

Если самолёт летит напрямую из А в В, то направление его движения отклоняется от северного на…

Ответ: 8

- ○ к западу
- ✓ к востоку

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.5

Условие:

Траектория полёта самолёта всегда представляет собой отрезок прямой. От города А до города Б самолёт держал курс, отклоняясь от северного направления на 38 на восток. Из города Б он полетел в город В, отклоняясь от северного направления на 12 на запад. Известно, что расстояния от А до Б и от Б до В равны и составляют по 750 км.

Заполните пропуски.

Если самолёт летит напрямую из А в В, то направление его движения отклоняется от северного на…

Ответ: 13

- ○ к западу
- ✓ к востоку

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3

Условие:

Все обитатели острова Неразмерность имеют особенность — у них одна нога на один, на два или на три размера больше другой. Торговец приехал на остров, не зная об этой особенности, и привёз обычный товар. Покупатели же брали свои размеры (по 1 ботинку на каждую ногу). В итоге у торговца осталось четыре лишних башмака — два 36-го размера, по одному — 37-го размера и 45-го размера. Найдите наименьшее количество пар обуви, которое мог привезти продавец.

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Давайте покажем, что торговцу нужно было привести не менее пяти пар обуви.

Предположим, что он привёз 4 пары. Заметим, что среди этих 4 пар есть хотя бы по одной паре 36, 37 и 45 размеров. Так как у него был куплен ботинок 45 размера, то этот же абориген купил второй ботинок из пары, размер которой от 42 до 48 (это четвёртая пара, от неё у торговца ничего не осталось). Заметим, что второй ботинок четвертой пары тоже кто-то купил, а ещё купил к нему второй ботинок, который имел размер от 39 до 51. Тогда это должна быть пятая пара (и от неё у торговца ничего не осталось).

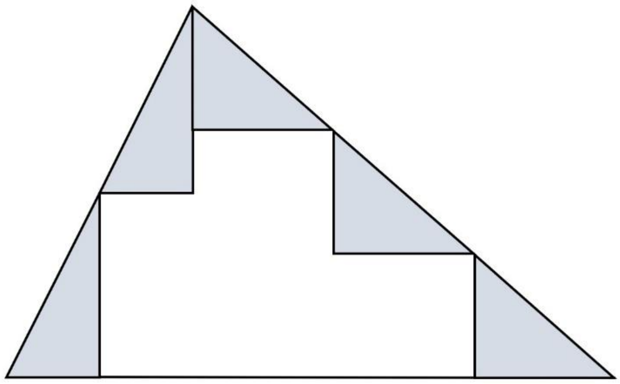
Получается, что пар должно быть хотя бы 5, осталось привести пример:

по одной паре 36, 37, 40, 42 и 45 размеров, и их покупали парами 37 – 40, 40 – 42, 42 – 45.

Задание № 4.1

Условие:

Из большого треугольника вырезали 5 маленьких одинаковых треугольников площадью 1 см^2 каждый так, как показано на рисунке.



Найдите площадь изначального треугольника. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.

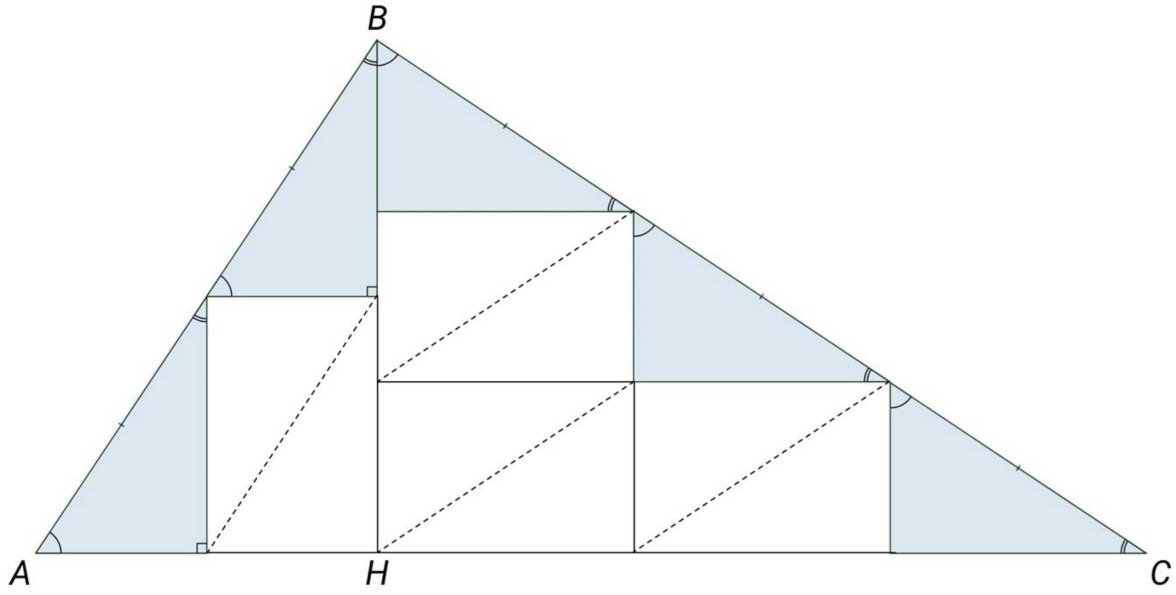
Ответ: 13

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

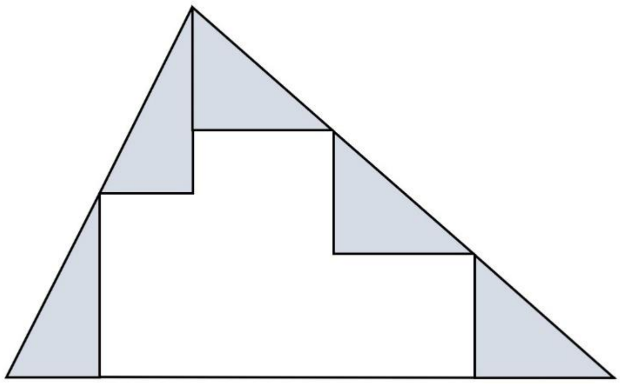
Обозначим углы большого треугольника через A, B и C, как написано на рисунке. Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$. Обозначив углы в равных маленьких треугольниках, получаем, что $\angle B = \alpha + \beta$. Но так как $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180 - \alpha - \beta = \alpha + \beta$, то $\angle B = 90°$. Теперь опустим из B высоту BH на гипотенузу, а из вершин маленьких треугольников, находящихся на катетах, опустим перпендикуляры на высоту BH и на гипотенузу AC. Весь треугольник ABC разобьётся на маленькие треугольники и на прямоугольники со сторонами, равными катетам маленьких треугольников. Каждый из прямоугольников можно диагональю разбить на два треугольника, равные маленьким исходным.


B
A
H
C

Задание № 4.2

Условие:

Из большого треугольника вырезали 5 маленьких одинаковых треугольников площадью 2 см^2 каждый так, как показано на рисунке.



Найдите площадь изначального треугольника. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.

Ответ: 26

Точное совпадение ответа — 1 балл

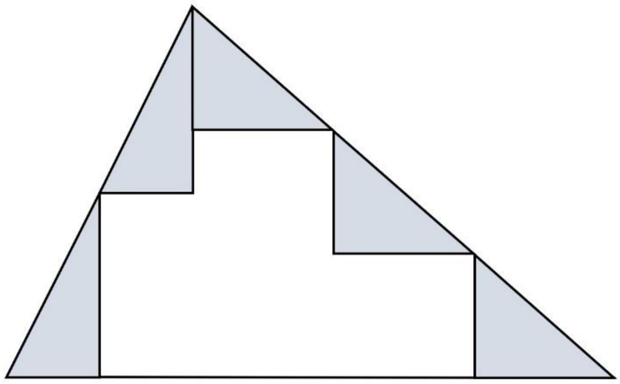
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Из большого треугольника вырезали 5 маленьких одинаковых треугольников площадью 3 см^2 каждый так, как показано на рисунке.



Найдите площадь изначального треугольника. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.

Ответ: 39

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

Известно, что ни одно из чисел a, b, c не равно 0 и что a + b+ c = 0. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{2a}{|a|}+\frac{2b}{|b|}+\frac{2c}{|c|}+\frac{3ab}{|ab|}+\frac{3ac}{|ac|}+\frac{3bc}{|bc|}+\frac{abc}{|abc|}\ ?$$

Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ –2
- ✓ –4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Из условий, что a+b+c=0 и что ни одно из чисел не равно нулю, следует, что два числа одного знака, и одно – другого. Возможны два случая:

1. Среди чисел a, b, c только одно отрицательное. Без ограничения общности будем считать, что a < 0.

Тогда выражение принимает вид: −2 + 2 + 2 – 3 – 3 + 3 − 1= − 2.

2. Среди чисел a, b, c ровно два отрицательных. Без ограничения общности будем считать, что a > 0.

Тогда выражение принимает вид: 2 – 2 – 2 – 3 – 3 + 3 + 1 = − 4.

Выражение принимает значения −2 и −4.

Задание № 5.2

Условие:

Известно, что ни одно из чисел a, b, c не равно 0 и что a + b+ c = 0. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{4a}{|a|}+\frac{4b}{|b|}+\frac{4c}{|c|}+\frac{ab}{|ab|}+\frac{ac}{|ac|}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{3abc}{|abc|}\ ?$$

Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ 0
- ✓ –2

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

Известно, что ни одно из чисел a, b, c не равно 0 и что a + b+ c = 0. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{3a}{|a|} + \frac{3b}{|b|} + \frac{3c}{|c|} + \frac{ab}{|ab|} + \frac{ac}{|ac|} + \frac{bc}{|bc|} + \frac{5abc}{|abc|}\ ?$$

Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ 1
- ✓ –3

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

Известно, что ни одно из чисел a, b, c не равно 0 и что a + b+ c = 0. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{2a}{|a|}+\frac{2b}{|b|}+\frac{2c}{|c|}+\frac{4ab}{|ab|}+\frac{4ac}{|ac|}+\frac{4bc}{|bc|}+\frac{3abc}{|abc|}\,?$$

Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ –3
- ✓ –5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

В урне лежат красные и синие шары, причём красные составляют 36 % от всех шаров. Какую часть синих шаров необходимо убрать, чтобы красные стали составлять 72 % от всех шаров? Ответ выразите в процентах.

Ответ: 78.125

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Т.к. количество красных шаров неизменно, а их процентное содержание среди всех шаров увеличивается вдвое, то количество всех шаров уменьшается вдвое. Это означает, что 50 % всех шаров нужно убрать, чтобы бывшие 36 % составили 72 % от нового количества. Получается, что из синих шаров (которые составляют 64 % от общего числа шаров) нужно убрать 50 % (также от общего числа) или же $50 \div 64 \cdot 100$ % от количества самих синих шаров.

$$50 \div 64 \cdot 100\ \% = 78.125\ \%$$

Задание № 6.2

Условие:

В урне лежат красные и синие шары, причём красные составляют 20 % от всех шаров. Какую часть синих шаров необходимо убрать, чтобы красные стали составлять 80 % от всех шаров? Ответ выразите в процентах.

Ответ: 93.75

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

Иван расставил в таблицу 4 × 5 (строк меньше, чем столбцов) числа 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы ни в каком столбце и ни в какой строке не встречались одинаковые числа. Затем он подсчитал сумму чисел в двух первых столбцах. Какие числа у него **НЕ** могли получиться? Выберите все подходящие варианты:

Ответ:

- ✓ 20
- o 21
- o 23
- o 26
- ✓ 28
- ✓ 29

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Сначала найдём минимальную сумму в столбце: 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Если в двух столбцах будет минимальная сумма, то их сумма = 20, но тогда в этих столбцах не будет присутствовать число 5. При этом число 5 должно быть в каждой строке, то есть их минимум 4 штуки. При этом осталось только 3 столбца, и расставить пятёрки невозможно. Таким образом, 20 не получится.

Заметим, что максимальная сумма в столбце 2 + 3 + 4 + 5 = 14, значит, в двух столбцах — 28. Отсюда понимаем, что 29 невозможно получить, но и 28 невозможно, так как тогда в этих столбцах не используется число 1, и далее соображения, как и в предыдущем случае. Остальные случаи возможны, см. ниже

1	3	4	5	2
2	1	3	4	5
3	2	5	1	4
4	5	2	3	1

1	5	2	3	4
2	1	5	4	3
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2

2	5	4	3	1
3	1	5	4	2
4	2	3	1	5
5	4	1	2	3

Задание № 7.2

Условие:

Иван расставил в таблицу 4×5 (строк меньше, чем столбцов) числа 0, 1, 2, 3, 4 так, чтобы ни в каком столбце и ни в какой строке не встречались одинаковые числа. Затем он подсчитал сумму чисел в двух первых столбцах. Какие числа у него **НЕ** могли получиться? Выберите все подходящие варианты:

Ответ:

- ✓ 11
- ✓ 12
- o 14
- o 15
- o 19
- ✓ 20

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

Иван расставил в таблицу 5×6 (строк меньше, чем столбцов) числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы ни в каком столбце и ни в какой строке не встречались одинаковые числа. Затем он подсчитал сумму чисел в двух первых столбцах. Какие числа у него **НЕ** могли получиться? Выберите все подходящие варианты:

Ответ:

- ✓ 30
- o 32
- o 35
- o 39
- ✓ 40
- ✓ 41

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Найдите количество различных шестёрок различных целых чисел (a, b, c, d, e, f) таких, что

$$\begin{cases} abc = 70 \\ cde = 71 \\ efa = 72 \end{cases}$$

Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что c — делитель НОД (70; 71) = 1, значит, c = ±1, аналогично e — делитель НОД (71; 72) = 1, и тоже e = ±1, но они не могут быть равны друг другу по условию. Тогда d = −71, т.к. c и e разных знаков, c = −e, а c = ±1. Число a — делитель НОД (70; 72) = 2, поэтому либо a = ±1, либо a = ±2. Но числа 1 и − 1 уже заняты, поэтому a = ±2. Теперь, зная a, однозначно определяется значение b и f. Таким образом, нам надо выбрать знак у числа c и у числа a, у каждого — двумя способами, поэтому решений у этой системы ровно 4.

Задание № 8.2

Условие:

Найдите количество различных шестёрок различных целых чисел (a, b, c, d, e, f) таких, что

$$\begin{cases} abc = 28 \\ cde = 29 \\ efa = 30 \end{cases}$$

Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Найдите количество различных шестёрок различных целых чисел (a, b, c, d, e, f) таких, что

$$\begin{cases} abc = 28 \\ cde = 31 \\ efa = 32 \end{cases}$$

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Найдите количество различных шестёрок различных целых чисел (a, b, c, d, e, f) таких, что

$$\begin{cases} abc = 30 \\ cde = 41 \\ efa = 50 \end{cases}$$

Ответ: 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1