Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 6 класса

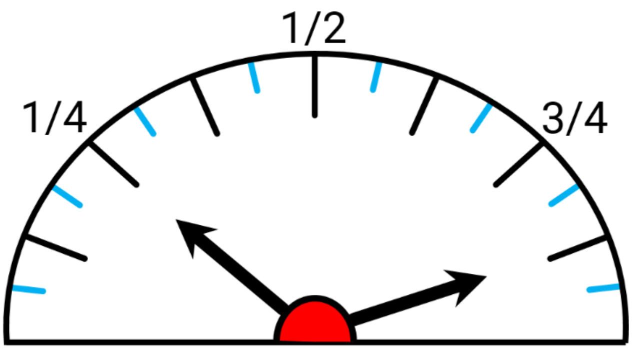
2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

На индикаторе топлива в автомобиле показывается, какая часть топливного бака заполнена топливом. На рисунке показан индикатор в начале и в конце поездки.



Найдите ёмкость топливного бака, если на поездку было потрачено 25 литров бензина. Ответ выразите в литрах.

Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Изначально индикатор показывает $\frac{7}{8}$, а в конце — $\frac{1}{4}$.

Всего потратили $\frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$ бака.

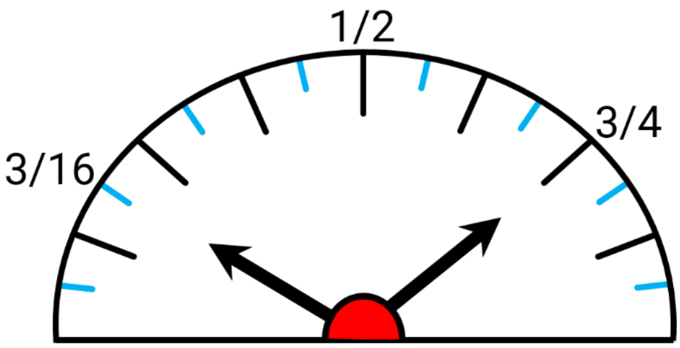
Мы знаем, что потратили 25 литров бензина, значит, $\frac{5}{8}$ бака — это 25 литров.

Тогда полный бак составляет $(\frac{25}{5}) \cdot 8 = 40$ литров.

Задание № 1.2

Условие:

На индикаторе топлива в автомобиле показывается, какая часть топливного бака заполнена топливом. На рисунке показан индикатор в начале и в конце поездки.



Найдите ёмкость топливного бака, если на поездку было потрачено 18 литров бензина. Ответ выразите в литрах.

Ответ: 32

Точное совпадение ответа — 1 балл

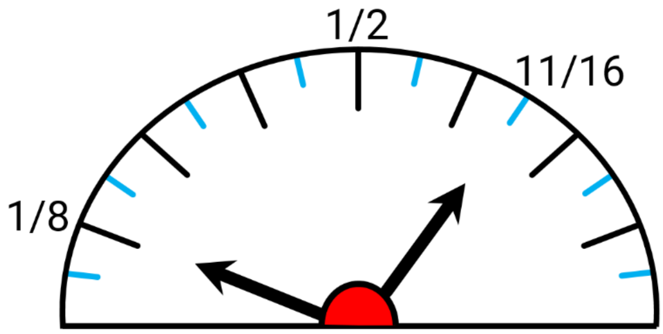
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

На индикаторе топлива в автомобиле показывается, какая часть топливного бака заполнена топливом. На рисунке показан индикатор в начале и в конце поездки.



Найдите ёмкость топливного бака, если на поездку было потрачено 18 литров бензина. Ответ выразите в литрах.

Ответ: 32

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Назовём число подходящим, если оно делится на 2 и 3, не делится на 4 и на 5, делится на 6 и на 7, но не делится на 8 и 9. Сколько подходящих чисел среди натуральных чисел от 1 до 500?

Ответ: 3

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Наше число должно делиться на 2, 3, 6, 7, то есть на их НОК, а НОК (2, 3, 6, 7) = 42. Разделим 500 на 42 с остатком, получим в качестве неполного частного 11. Значит, мы рассматриваем только числа 42n, $1 \le n \le 11$.

При этом число 42n не должно делиться на 4 (и тогда оно уже точно не делится на 8), но 42 делится на 2, то есть n не делится на 2. Так как итоговое число не делится на 5, то n не делится на 5. И так как 42n не делится на 9, а 42 делится на 3, то n не делится на 3. Таких чисел для $1 \le n \le 11$ всего 3: 1, 7 и 11.

Задание № 2.2

Условие:

Назовём число подходящим, если оно делится на 2 и 3, не делится на 4 и на 5, делится на 6 и на 7, но не делится на 8 и 9. Сколько подходящих чисел среди натуральных чисел от 1 до 450?

Ответ: 2

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Назовём число подходящим, если оно делится на 2 и 3, не делится на 4 и на 5, делится на 6 и на 7, но не делится на 8 и 9. Сколько подходящих чисел среди натуральных чисел от 1 до 550?

Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

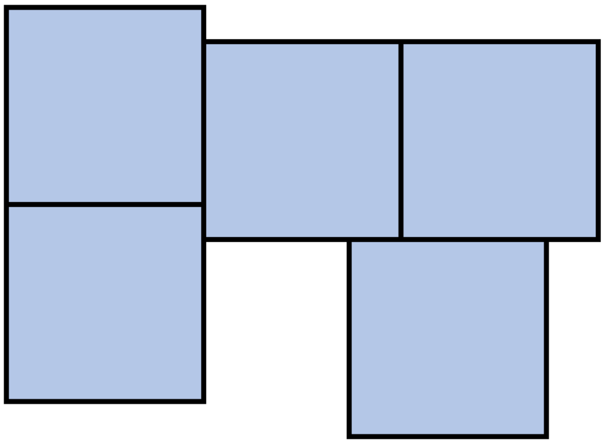
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

Фигура на рисунке составлена из пяти одинаковых квадратов, площадь каждого из которых равна 100 см^2. Чему равен периметр этой фигуры? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 120

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

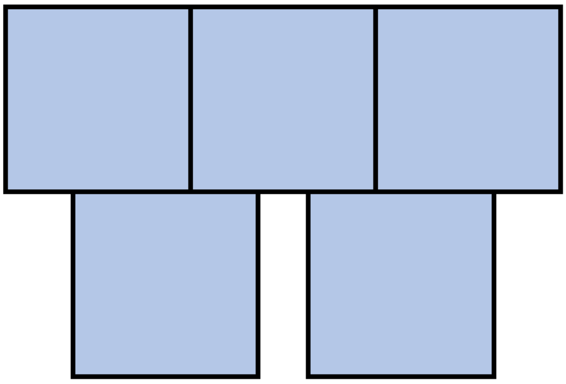
Решение.

Все квадраты равны, так как имеют одинаковую площадь, а именно 100 см^2, тогда сторона одного квадрата – 10 см. Периметр одного квадрата равен 40 см, а всех пяти квадратов – 200 см. Но так как некоторые квадраты соприкасаются, то те части, которые соприкасаются, не входят в периметр. Заметим, что у нас 4 отрезка «соприкосновения», при этом длина каждого отрезка равна стороне квадрата, то есть 10 см. Но эта длина считается дважды (так как принадлежит двум квадратам), итого ответ: $200 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 120$.

Задание № 3.2

Условие:

Фигура на рисунке составлена из пяти одинаковых квадратов, площадь каждого из которых равна 121 см^2. Чему равен периметр этой фигуры? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 132

Точное совпадение ответа — 1 балл

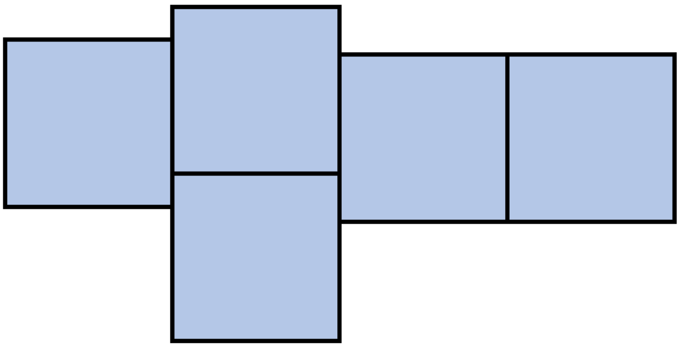
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

Фигура на рисунке составлена из пяти одинаковых квадратов, площадь каждого из которых равна 81 $см^2$. Чему равен периметр этой фигуры? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 108

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Коля подсчитал, сколько четвергов, пятниц и суббот было в сумме за период в два месяца. Оказалось, что суббот и четвергов было поровну, а пятниц — меньше. А с какого дня начинался месяц, предшествовавший этим двум?

Ответ:

- o С понедельника
- o Со вторника
- o Со среды
- ✓ С четверга
- o С пятницы
- o С субботы
- o С воскресенья

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Количество дней в двух месяцах (назовём эти два месяца периодом) подряд составляет от 59 до 62 ($28 + 31$, $29 + 31$, $30 + 31$, $31 + 31$). Так как в нём суббот и четвергов поровну, а пятниц меньше, значит, этот период начинается в субботу и заканчивается в четверг, а значит, в нём несколько полных семидневок (с сб по пт) и ещё 6 дней. Отсюда получаем, что количество дней в периоде даёт остаток 6 при делении на 7, то есть равно 62. Это возможно только в том случае, когда в обоих месяцах по 31 дню. Тогда в предыдущем месяце 30 дней (ноябрь – декабрь – январь или июнь – июль – август). Так как период начинается в субботу, то предыдущий месяц заканчивается в пятницу, а значит, начинается в четверг.

Задание № 4.2

Условие:

Коля подсчитал, сколько пятниц, суббот и воскресений было в сумме за период в два месяца. Оказалось, что воскресений и пятниц было поровну, а суббот — меньше. А с какого дня начинался месяц, предшествовавший этим двум?

Ответ:

- o С понедельника
- o Со вторника
- o Со среды
- o С четверга
- ✓ С пятницы
- o С субботы
- o С воскресенья

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Коля подсчитал, сколько сред, четвергов и пятниц было в сумме за период в два месяца. Оказалось, что пятниц и сред было поровну, а четвергов — меньше. А с какого дня начинался месяц, предшествовавший этим двум?

Ответ:

- o С понедельника
- o Со вторника
- ✓ Со среды
- o С четверга
- o С пятницы
- o С субботы
- o С воскресенья

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

Компания из 9 друзей заказала на всех три разные пиццы. Каждая пицца была разрезана на 8 кусков. Каждый из друзей попробовал хотя бы один кусок, и всё было съедено. Ни один кусок не резали дополнительно. Выберите все утверждения, которые будут гарантированно правильными:

Ответ:

- o Кто-то съел четыре ломтика
- o Каждый съел не менее двух кусков
- o Некоторые съели по два куска, а остальные съели по три куска
- ✓ Кто-то из них съел как минимум три куска
- o Хотя бы двое съели по два кусочка
- o Кому-то достался только один кусочек

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Утверждения а) и б) не обязательно верны, потому что 6 человек могли съесть по 3 куска, а 3 человека по 2 куска.

Утверждения в), г) и е) не верны, потому что 7 человек могли съесть по 3 куска, 1 человек 2 куска и 1 человек всего 1 кусок.

Утверждение д) верно. Докажем это от противного. Если оно не верно, то каждый съел не более двух кусков, но тогда всего съедено не более $9 \cdot 2 = 18$ кусков, а их всего 24.

Задание № 5.2

Условие:

Компания из 9 друзей заказала на всех шесть разных пицц. Каждая пицца была разрезана на 4 куска. Каждый из друзей попробовал хотя бы один кусок, и всё было съедено. Ни один кусок не резали дополнительно. Выберите все утверждения, которые будут гарантированно правильными:

Ответ:

- o Кому-то достался только один кусочек
- ✓ Кто-то из них съел как минимум три куска
- o Некоторые съели по два куска, а остальные съели по три куска
- o Каждый съел не менее двух кусков
- o Хотя бы двое съели по два кусочка
- o Кто-то съел четыре ломтика

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

Компания из 18 друзей заказала на всех шесть разных пицц. Каждая пицца была разрезана на 8 кусков. Каждый из друзей попробовал хотя бы один кусок, и всё было съедено. Ни один кусок не резали дополнительно. Выберите все утверждения, которые будут гарантированно правильными:

Ответ:

- o Каждый съел не менее двух кусков
- o Кто-то съел четыре ломтика
- o Кому-то достался только один кусочек
- o Хотя бы двое съели по два кусочка
- o Некоторые съели по два куска, а остальные съели по три куска
- ✓ Кто-то из них съел как минимум три куска

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

На олимпиаде Катя, Мотя, Федя и Паша решали задачи, причём Катя решила на 5 задач больше Феди, а Мотя — на 4 задачи больше Паши. Все решили разное число задач. Учитель послал в Москву на проверку только две лучшие работы, в которых в сумме было решено 15 задач. Сколько задач было решено во всех четырёх работах? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ 21
- ✓ 19

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что если работа Феди попала на проверку, то точно туда попала и работа Кати (так как она написала лучше Феди), аналогично и в паре Мотя-Паша. Рассмотрим, чьи работы могли попасть на проверку. Возможны три случая:

1) Катя и Федя. Тогда у них в сумме 15 задач, у Кати на — 5 больше, тогда у Кати — 10 задач, у Феди — 5 задач. При этом у Феди больше, чем у Моти (так как Федина работа была выслана). Значит, у Моти — не больше 4 задач. Но у него
и не меньше 4 задач, так как он решил на 4 больше, чем Паша. Итого у Моти — 4 задачи, у Паши — 0 задач, а всего — 15 + 4 = 19 задач.

2) Катя и Мотя. Тогда у этой пары в сумме 15 задач, а у пары Федя + Паша — на 9 задач меньше, то есть 6 задач, и всего на четверых получается 21 задача.

3) Мотя и Паша. Тогда у них на двоих решено 15 задач, но у Моти — на 4 задачи больше, то есть у них количество задач одной четности. Тогда в сумме у них должно быть чётное число задач, противоречие.

Возможны только два варианта.

Задание № 6.2

Условие:

На олимпиаде Катя, Мотя, Федя и Паша решали задачи, причём Катя решила на 5 задач больше Феди, а Мотя — на 8 задач больше Паши. Все решили разное число задач. Учитель послал в Москву на проверку только две лучшие работы, в которых в сумме было решено 23 задачи. Сколько задач было решено во всех четырёх работах? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ 31
- ✓ 33

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

На олимпиаде Катя, Мотя, Федя и Паша решали задачи, причём Катя решила на 5 задач больше Феди, а Мотя — на 6 задач больше Паши. Все решили разное число задач. Учитель послал в Москву на проверку только две лучшие работы, в которых в сумме было решено 19 задач. Сколько задач было решено во всех четырёх работах? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ 25
- ✓ 27

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

В корзине лежат яблоки и сливы. Все яблоки весят одинаково, и все сливы тоже. Оказалось, что сливы составляют $\frac{3}{5}$ от общего количества фруктов, а вот масса слив — $\frac{1}{3}$ от общей массы фруктов. Каждое яблоко весит 180 г. Сколько весит слива? Ответ выразите в граммах.

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Так как сливы составляют $\frac{3}{5}$ по количеству, то яблоки — $\frac{2}{5}$, то есть их соотношение 3 : 2. По массе сливы составляют $\frac{1}{3}$, значит, яблоки — $\frac{2}{3}$, соотношение составляет 1 : 2. Чтобы получить общую массу, надо количество фруктов умножить на вес одного фрукта. Обозначим массу одной сливы за s, тогда отношение массы одной сливы к одному яблоку равно $\frac{s}{180}$. Получаем, что $\frac{3}{2} \cdot \frac{s}{180} = \frac{1}{2}$, откуда $\frac{s}{180} = \frac{1}{3}$, s = 60.

Задание № 7.2

Условие:

В корзине лежат яблоки и сливы. Все яблоки весят одинаково, и все сливы тоже. Оказалось, что сливы составляют $\frac{4}{7}$ от общего количества фруктов, а вот масса слив — $\frac{1}{3}$ от общей массы фруктов. Каждое яблоко весит 200 г. Сколько весит слива? Ответ выразите в граммах.

Ответ: 75

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

В корзине лежат яблоки и сливы. Все яблоки весят одинаково, и все сливы тоже. Оказалось, что сливы составляют $\frac{5}{7}$ от общего количества фруктов, а вот масса слив — $\frac{1}{3}$ от общей массы фруктов. Каждое яблоко весит 180 г. Сколько весит слива? Ответ выразите в граммах.

Ответ: 36

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

В теннисном турнире все игроки должны были сыграть друг с другом ровно один раз. Однако уже во время турнира трое игроков отказались от участия. Мы знаем, что каждый из выбывших сыграл по две игры и что в соревновании было сыграно ровно 50 игр. Сколько игроков стартовало в турнире?

Ответ: 13

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Назовём игру «лишней», если в ней участвовала выбывшая команда. Тогда остальные команды сыграли каждая друг с другом, значит, игр было $n(n-1) \div 2$ (это так называемые треугольные числа, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 и т.д.) Проверим, сколько могло быть «лишних» игр. Если три выбывшие команды играли только друг с другом, то игры образуют треугольник, и их ровно 3. Каждую такую игру между выбывшими командами можно заменить на две игры с оставшимися, то есть игр может быть 4, 5 или 6. Так как игр 50, вычтем лишние игры, получается от 44 до 47, а так как число должно быть вида $n(n-1) \div 2$, то это 45. 45 игр — это 10 игроков, прибавляем ещё оставшихся 3, получаем ответ.

Задание № 8.2

Условие:

В футбольном турнире все команды должны были сыграть друг с другом ровно один раз. Однако уже во время турнира четыре команды отказались от участия. Мы знаем, что каждая из выбывших сыграла по две игры и что в соревновании было сыграно ровно 56 игр. Сколько команд стартовало в турнире?

Ответ: 14

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

В баскетбольном турнире все команды должны были сыграть друг с другом ровно один раз. Однако уже во время турнира три команды отказались от участия. Мы знаем, что каждая из выбывших сыграла по две игры и что в соревновании было сыграно ровно 70 игр. Сколько команд стартовало в турнире?

Ответ: 15

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

В теннисном турнире все игроки должны были сыграть друг с другом только один раз. Однако уже во время турнира четверо игроков отказались от участия. Мы знаем, что каждый из выбывших сыграл по две игры и что в соревновании было сыграно ровно 76 игр. Сколько игроков стартовало в турнире?

Ответ: 16

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1