Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 11 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

В выборах главы школьного совета приняло участие 1200 учеников старшей и средней школы. Было выдвинуто всего 2 кандидата — Антон и Борис, причём для победы было достаточно набрать больше половины голосов участников. В какой-то момент Антон точно понял, что уже набрал половину голосов. В этот момент из подсчитанных бюллетеней было 8 % недействительных, а из остальных 60 % было за Антона, а 40 % — за Бориса. Какое наименьшее количество бюллетеней могло быть подсчитано к этому моменту?

Ответ: 1125

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть всего было обработано n бюллетеней, значит, голосов за Антона было подано $\frac{92}{100} \cdot \frac{60}{100} \mathrm{n} = \frac{23 \cdot 3\mathrm{n}}{25 \cdot 5}$. Это целое число. поэтому n кратно 125. С другой стороны, это число больше, чем 50 % от 1200, то есть 600.

$$\frac{23 \cdot 3\mathrm{n}}{25 \cdot 5} > 600,$$

$$\mathrm{n} > \frac{125 \cdot 600}{69} = 1086.95 \ldots,$$

откуда $\mathrm{n} \geq 1087$. Наименьшее число, которое больше 1087 и делится на 125, это 1125.

Задание № 1.2

Условие:

В выборах главы школьного совета приняло участие 550 учеников старшей и средней школы. Было выдвинуто всего 2 кандидата — Антон и Борис, причём для победы было достаточно набрать больше половины голосов участников. В какой-то момент Антон точно понял, что уже набрал половину голосов. В этот момент из подсчитанных бюллетеней было 12 % недействительных, а из остальных 70 % было за Антона, а 30 % — за Бориса. Какое наименьшее количество бюллетеней могло быть подсчитано к этому моменту?

Ответ: 500

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

В выборах главы школьного совета приняло участие 750 учеников старшей и средней школы. Было выдвинуто всего 2 кандидата — Антон и Борис, причём для победы было достаточно набрать больше половины голосов участников. В какой-то момент Антон точно понял, что уже набрал половину голосов. В этот момент из подсчитанных бюллетеней было 4 % недействительных, а из остальных 90 % было за Антона, а 10 % — за Бориса. Какое наименьшее количество бюллетеней могло быть подсчитано к этому моменту?

Ответ: 500

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Обозначим новую математическую операцию a ♦ b = (a – 1) (b + 1). Известно, что a ♦ b = 24, a b ♦ a = 30. Чему может быть равно a + b? Укажите все возможные варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ –11
- ✓ 11

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Запишем данные нам условия:

$$ab + a - b - 1 = 24;$$

$$ab - a + b - 1 = 30.$$

Сложим их и получим, $2ab - 2 = 54$, то есть, $ab = 28$. Вычтем из первого второе и получим, $2a - 2b = -6$, т.е. $b - a = 3$. Выразим $b = a + 3$ и подставим в $ab = 28$, получим:

$$a(a + 3) = 28,$$

$$a^2 + 3a - 28 = 0.$$

Решим уравнение, получим: $a_1 = 4$, $a_2 = -7$.

Значит, $a + b = a + a + 3$ равно 11 (при $a = 4$) и –11 (при $a = -7$).

Задание № 2.2

Условие:

Обозначим новую математическую операцию $a \blacklozenge b = (a - 1)(b + 1)$. Известно, что $a \blacklozenge b = 24$, а $b \blacklozenge a = 40$. Чему может быть равно $a + b$? Укажите все возможные варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ –14
- ✓ 14

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Обозначим новую математическую операцию $a \blacklozenge b = (a - 1)(b + 1)$. Известно, что $a \blacklozenge b = 30$, а $b \blacklozenge a = 40$. Чему может быть равно $a + b$? Укажите все возможные варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ –13
- ✓ 13

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

В летнем лагере 19 детей. В первый день мальчики пошли в кино, а девочки — в бассейн. Во второй день все девочки пошли в кино, а мальчики — наоборот, в бассейн. Оказалось, что в первый день за все виды досуга было заплачено на 1111 рублей больше, чем во второй день. Известно, что посещение бассейна дороже, чем билет в кино. Сколько в лагере мальчиков? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ 4
- ✓ 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть девочек d, а мальчиков — m. Так как билет в бассейн дороже билета в кино, а второй день вышел дешевле первого, то получается, что девочек больше.

	1 день	2 день
Мальчики	Кино	Бассейн
Девочки	Бассейн	Кино

Обозначим разницу в стоимости билетов в бассейн и в кино через Δ. Добавим в таблицу ещё один столбец, где посчитаем разницу в стоимости первого и второго отдельно для мальчиков и отдельно для девочек. Понятно, что для мальчиков она будет отрицательна.

	1 день	2 день	Разница в стоимости первого и второго дня
Мальчики	Кино	Бассейн	$d\Delta$
Девочки	Бассейн	Кино	$d\Delta$

Общая разница в стоимости дней равна $d\Delta - m\Delta = (d - m)\Delta = 1111$. Так как оба сомножителя целые и положительные, то разложим 1111 на простые сомножители, получим $1111 = 11 \cdot 101$. Но $(d - m)$ не может быть больше 19, поэтому надо $d - m = 1$ либо $d - m = 11$. С учетом того, что в сумме мальчиков и девочек 19, получаем, что мальчиков 9, а во втором — что мальчиков четверо.

Задание № 3.2

Условие:

В летнем лагере 25 детей. В первый день мальчики пошли в кино, а девочки — в бассейн. Во второй день все девочки пошли в кино, а мальчики — наоборот, в бассейн. Оказалось, что в первый день за все виды досуга было заплачено на 1111 рублей больше, чем во второй день. Известно, что посещение бассейна дороже, чем билет в кино. Сколько в лагере мальчиков? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ 7
- ✓ 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

В летнем лагере 25 детей. В первый день мальчики пошли в кино, а девочки — в бассейн. Во второй день все девочки пошли в кино, а мальчики — наоборот, в бассейн. Оказалось, что в первый день за все виды досуга было заплачено на 1313 рублей больше, чем во второй день. Известно, что посещение бассейна дороже, чем билет в кино. Сколько в лагере мальчиков? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ 6
- ✓ 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

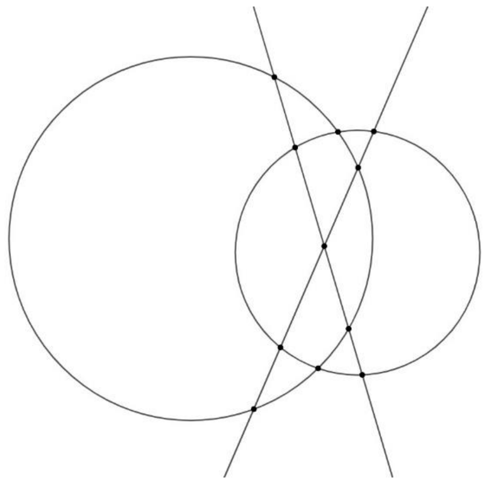
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

На доске нарисованы две окружности и две прямые, получилось всего 11 точек пересечения.



Какое наибольшее количество точек пересечения можно получить, если добавить к рисунку ещё одну окружность и две прямые?

Ответ: 36

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Две окружности пересекаются максимум в двух точках. Окружность пересекается с прямой максимум в двух точках. Прямая пересекается с прямой максимум в одной точке.

Когда мы добавим на рисунок ещё одну окружность, она максимум добавит:

- 2 точки пересечения с первой окружностью
- 2 точки пересечения со второй окружностью
- 2 точки пересечения с первой прямой
- 2 точки пересечения со второй прямой.

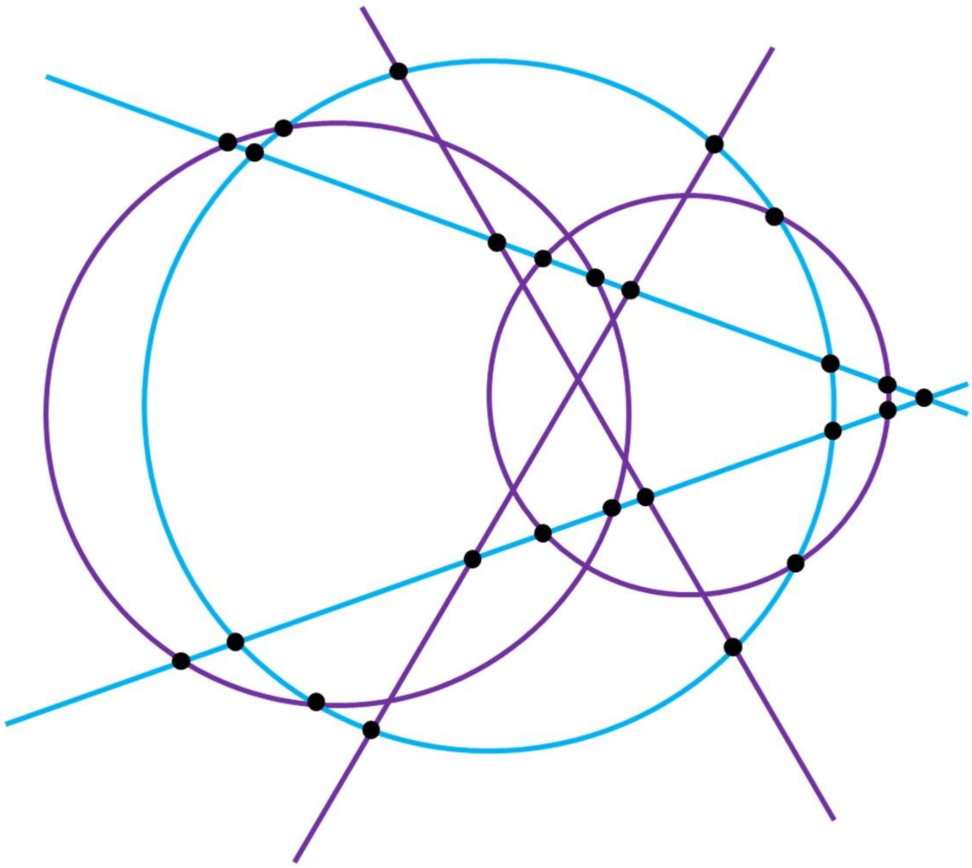
Итого: максимум 8 дополнительный точек.

Когда мы добавим еще одну прямую, то она максимум добавит по две точки пересечения с каждой из трёх окружностей и по одной точке пересечения с каждой прямой. Итого: максимум $2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8$ дополнительных точек.

То же самое для второй дополнительной прямой, но нужно учесть, что теперь на рисунке на одну прямую больше. Итого: от этой прямой максимум $2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 9$ дополнительных точек.

Заметим так же, что от порядка, в котором мы добавляли прямые и окружности, ничего не поменяется, так как любой объект должен пересекаться с каждым по максимально возможному числу точек.

Покажем на примере, что все эти $8 + 8 + 9 = 25$ дополнительных точек действительно можно получить:

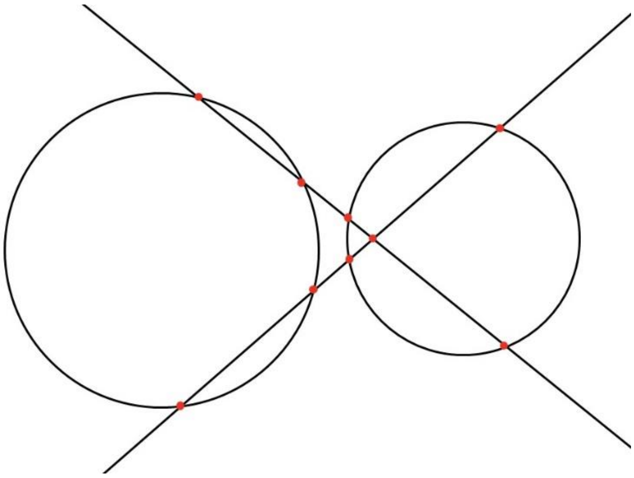


25 новых точек + 11 изначальных точек = 36.

Задание № 4.2

Условие:

На доске нарисованы две окружности и две прямые, получилось всего 9 точек пересечения.



Какое наибольшее количество точек пересечения можно получить, если добавить к рисунку ещё одну окружность и две прямые?

Ответ: 34

Точное совпадение ответа — 1 балл

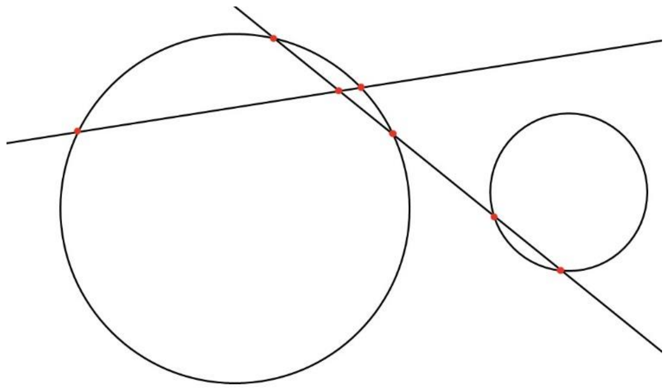
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

На доске нарисованы две окружности и две прямые, получилось всего 7 точек пересечения.



Какое наибольшее количество точек пересечения можно получить, если добавить к рисунку ещё одну окружность и две прямые?

Ответ: 32

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

Три круга радиусами 1, 2 и 3 попарно касаются друг друга внешним образом. Круги радиусом 1 и радиусом 2 касаются в точке A, а круги радиусом 2 и радиусом 3 — в точке B. Найдите расстояние AB, умноженное на $\sqrt{5}$.

Ответ: 4

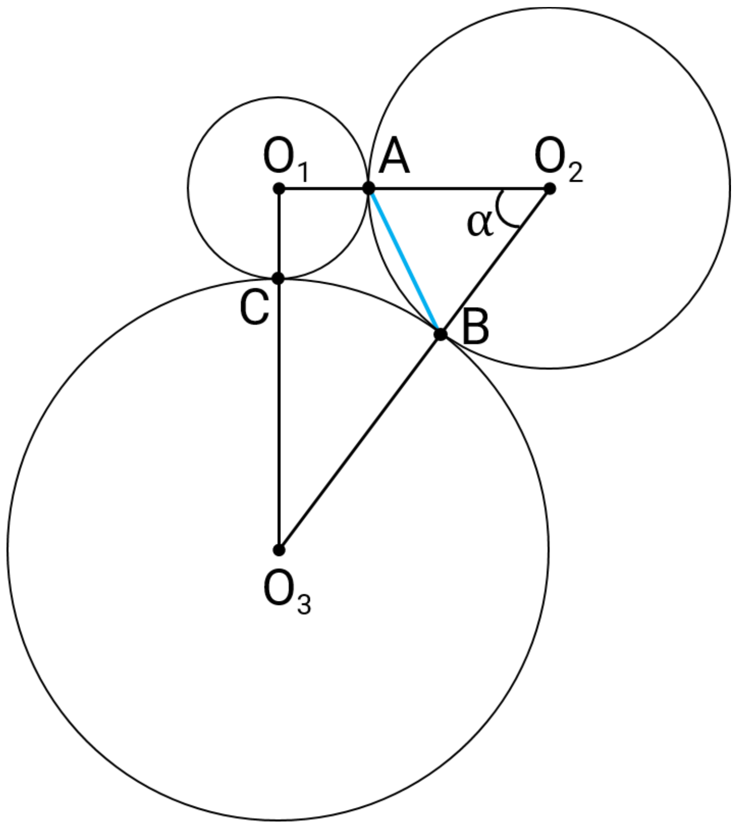
Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть O_1, O_2, O_3 — центры окружностей с радиусом 1, 2, 3 соответственно. Заметим, что треугольник — $O_1O_2O_3$ имеет стороны 3, 4, 5, а значит, он прямоугольный.

Обозначим через α угол $O_1O_2O_3$, тогда $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.



Теперь рассмотрим треугольник AO_2B. Мы знаем, что $AO_2 = O_2B = 2$, а $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Применим теорему косинусов (следствие, если возвести в квадрат обе части уравнения) для треугольника AO_2B:

$$AB^2 = AO_2^2 + O_2B^2 - 2 \cdot AO_2 \cdot O_2B \cdot \cos \alpha,$$

$$AB^2 = 4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} = 8 - 8 \cdot \frac{3}{5} = (40 - 24) \div 5 = \frac{16}{5}$$

Тогда $AB = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$, а AB, умноженное на $\sqrt{5}$, равно 4.

Задание № 5.2

Условие:

Три круга радиусами 2, 4 и 6 попарно касаются друг друга внешним образом. Круги радиусом 2 и радиусом 4 касаются в точке A, а круги радиусом 4 и радиусом 6 — в точке B. Найдите расстояние AB, умноженное на $\sqrt{5}$.

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

Три круга радиусами 3, 6 и 9 попарно касаются друг друга внешним образом. Круги радиусом 3 и радиусом 6 касаются в точке A, а круги радиусом 6 и радиусом 9 — в точке B. Найдите расстояние AB, умноженное на $\sqrt{5}$.

Ответ: 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

Робот умеет прибавлять к числу 3 или 5 либо делить его на 2. За какое наименьшее количество операций он получит из числа 2025 число 2024?

Ответ: 204

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что операции «+ 3» или «+ 5» только увеличивают число, а уменьшать может только операция деления. Значит, хотя бы одна операция деления должна быть. Кроме того, если хотя бы один раз применить операцию деления к нечётному числу, то робот получит нецелое число, и в дальнейшем при помощи этих трёх операций целое число он уже не сможет получить.

Значит, первая операция — это операция сложения, и мы получим либо 2028, либо 2030.

Рассмотрим операцию деления не как деление, а как уменьшение на половину от числа. Так как хотя бы одна операция деления необходима, то она произведена, когда число было не меньше 2028, получается, что это уменьшение минимум на 1014. Итоговое уменьшение должно составить всего лишь 1, значит, чтобы компенсировать подобное уменьшение, нам потребуется как минимум 203 раза прибавить 3 или 5. Итого минимум 203 + 1 операция.

Если потребуется ещё деление, то это будут операции уменьшения, и их тоже придется компенсировать.

Пример на 204 операции.

Операция 1. Прибавляем 3: 2025 + 3 = 2028

Операция 2. Делим на 2: 2028 ÷ 2 = 1014

Операции 3-204. 202 раза прибавляем 5: 1014 + 5 ÷ 202 = 2024.

Задание № 6.2

Условие:

Робот умеет прибавлять к числу 3 или 5 либо делить его на 2. За какое наименьшее количество операций он получит из числа 2027 число 2025?

Ответ: 204

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

Робот умеет прибавлять к числу 3 или 5 либо делить его на 2. За какое наименьшее количество операций он получит из числа 2029 число 2026?

Ответ: 204

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

Известно, что для пары действительных чисел x и y $(x > 1, y > 1)$ $\log_x(y^x) = \log_y(x^{4y}) = 10$. Чему может быть равно xy? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 25

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что $\log_x(y^x) = x\log_x y = 4y\log_y x = 10$, но тогда $x\log_x y \cdot$ $\cdot\, 4y\log_y x = 4xy = 10 \cdot 10 = 100$, откуда $xy = 25$.

Задание № 7.2

Условие:

Известно, что для пары действительных чисел x и y $(x > 1, y > 1)$ $\log_x(y^{2x}) = \log_y(x^{3y}) = 18$. Чему может быть равно xy? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 54

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

Известно, что для пары действительных чисел x и y $(x > 1, y > 1)$ $\log_x(y^x) = \log_y(x^{7y}) = 21$. Чему может быть равно xy? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 63

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

Известно, что для пары действительных чисел x и y $(x > 1, y > 1)$ $\log_x(y^{4x}) = \log_y(x^{3y}) = 24$. Чему может быть равно xy? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 48

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

За круглым столом стояли 12 стульев, которые пронумерованы от 1 до 12. В переговорах участвовали президенты четырёх стран, каждый со своим переводчиком. Президенты могли сесть только на стулья с нечётными номерами, а переводчики всегда садились рядом со своими президентами. Сколькими способами президенты и их переводчики могли сесть за стол переговоров?

Ответ: 2520

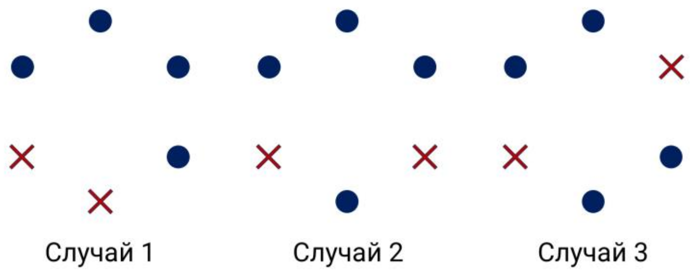
Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Рассмотрим только 6 стульев, куда могли сесть президенты. Может быть три случая:

- Все занятые стулья идут подряд
- Три занятых стула подряд, а один стул отделён от них пустыми и слева, и справа
- Есть две группы по два занятых стула



Случай 1. Таких ситуаций 6 (определяются первым занятым стулом, от которого остальные занятые идут по часовой стрелке). Теперь учтём, что 4 президента могут сесть 4! = 24 различными способами. В этой ситуации у нас 5 вариантов рассадки переводчиков — все слева от своих президентов, четыре слева, а один

(крайний) — справа, три слева и два справа, и т.д. до случая, когда справа от своих президентов сидят все переводчики. Итого $6 \cdot 5 \cdot 24 = 30 \cdot 24$.

Случай 2. Таких ситуаций тоже 6 (определяются «изолированным» стулом), при этом четыре случая рассадки переводчиков около трёх президентов и два — около «изолированного» стула. Учтем, что есть 24 способа перестановки президентов, итого $6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 24 = 48 \cdot 24$.

Случай 3. Таких ситуаций 3 (два незанятых стула находятся друг напротив друга, что соответствует выбору одного диаметра из трёх), при этом три случая рассадки переводчиков около двух президентов и ещё три — около других трёх. Учитывая то, что президенты разные, получаем $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 24 = 27 \cdot 24$.

Складывая, получаем $(30 + 48 + 27) \cdot 24 = 2520$.

Задание № 8.2

Условие:

За круглым столом стояли 12 стульев, которые пронумерованы от 1 до 12. В переговорах участвовали президенты трёх стран, каждый со своим переводчиком. Президенты могли сесть только на стулья с нечётными номерами, а переводчики всегда садились рядом со своими президентами. Сколькими способами президенты и их переводчики могли сесть за стол переговоров?

Ответ: 672

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

За круглым столом стояли 14 стульев, которые пронумерованы от 1 до 14. В переговорах участвовали президенты пяти стран, каждый со своим переводчиком. Президенты могли сесть только на стулья с нечётными номерами, а переводчики всегда садились рядом со своими президентами. Сколькими способами президенты и их переводчики могли сесть за стол переговоров?

Ответ: 23520

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1