Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 10 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Аня, Боря и Вова пошли в туристический поход, решив отказаться от телефонов и пользоваться только компасом. Ребятам было известно направление, но не расстояние до ближайшего кемпинга. Аня сказала: «Нам идти не меньше 10 км», Боря ответил: «Нет, думаю, что не больше 8 км», а Вова подытожил: «Нам осталось 8.5 км плюс-минус 500 м». Впоследствии оказалось, что никто из них не был прав в тот момент. В каком промежутке лежит значение расстояния до кемпинга, которое обсуждали ребята? Ответ выразите в километрах.

Ответ:

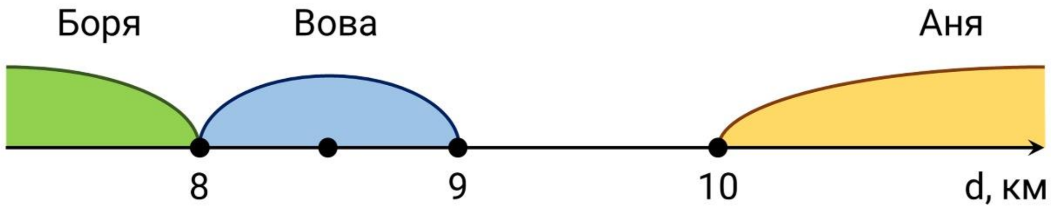
- ○ (8.5; 9]
- ✓ (9; 10)
- ○ (8; 9)
- ○ (8; 8.5)
- ○ [9; 10)
- ○ (8.5; 9.5)

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Отметим на числовой прямой области, в которых мог находиться кемпинг, согласно утверждениям ребят. Поскольку все они сказали неправду, на самом деле кемпинг может находиться только там, где не отмечена ни одна область истинности высказываний. Это интервал от 9 км до 10 км.



Задание № 1.2

Условие:

Аня, Боря и Вова пошли в туристический поход, решив отказаться от телефонов и пользоваться только компасом. Ребятам было известно направление, но не расстояние до ближайшего кемпинга. Аня сказала: «Нам идти не меньше 10 км», Боря ответил: «Нет, думаю, что не больше 8 км», а Вова подытожил: «Нам осталось 9.5 км плюс-минус 500 м». Впоследствии оказалось, что никто из них не был прав в тот момент. В каком промежутке лежит значение расстояния до кемпинга, которое обсуждали ребята? Ответ выразите в километрах.

Ответ:

- ○ (8.5; 9]
- ○ (9; 10)
- ✓ (8; 9)
- ○ (8; 8.5)
- ○ [9; 10)
- ○ (8.5; 9.5)

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Аня, Боря и Вова пошли в туристический поход, решив отказаться от телефонов и пользоваться только компасом. Ребятам было известно направление, но не расстояние до ближайшего кемпинга. Аня сказала: «Нам идти не меньше 10 км», Боря ответил: «Нет, думаю, что не больше 8 км», а Вова подытожил: «Нам осталось 8.5 км плюс-минус 1 км». Впоследствии оказалось, что никто из них не был прав в тот момент. В каком промежутке лежит значение расстояния до кемпинга, которое обсуждали ребята? Ответ выразите в километрах.

Ответ:

- ○ (8.5; 9]
- ○ [7.5; 8.5]
- ○ (7.5; 9)
- ○ (8; 8.5)
- ○ [9; 10)
- ✓ [7.5; 8]

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Найдите значение выражения $\sqrt{1024\sqrt{512\sqrt{256\ldots\sqrt{16\sqrt{8\sqrt{4}}}}}}$.

Ответ: 512

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Формула имеет вид $\sqrt{2^n\sqrt{2^{n-1}\sqrt{2^{n-2}\ldots\sqrt{2^4\sqrt{2^3\sqrt{2^2}}}}}}$. Докажем по индукции, что её значение равно 2^{n-1}. Проверим базу при n = 3: $\sqrt{2^3\sqrt{2^2}} = \sqrt{2^3 \cdot 2} = \sqrt{2^4} = 2^2$.

Пусть $\sqrt{2^{k-1}\sqrt{2^{k-2}\ldots\sqrt{2^4\sqrt{2^3\sqrt{2^2}}}}} = 2^{k-2}$, тогда $\sqrt{2^k\sqrt{2^{k-1}\sqrt{2^{k-2}\ldots\sqrt{2^4\sqrt{2^3\sqrt{2^2}}}}}} =$

$= \sqrt{2^k \cdot 2^{k-2}} = \sqrt{2^{2k-2}} = 2^{k-1}$, откуда получается ответ.

Задание № 2.2

Условие:

Найдите значение выражения $\sqrt{2048\sqrt{1024\sqrt{512\ldots\sqrt{16\sqrt{8\sqrt{4}}}}}}$.

Ответ: 1024

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Найдите значение выражения $\sqrt{6561\sqrt{2187\sqrt{729\ldots\sqrt{81\sqrt{27\sqrt{9}}}}}}$.

Ответ: 2187

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Найдите значение выражения $\sqrt{78125\sqrt{15625\sqrt{3125\sqrt{625\sqrt{125\sqrt{25}}}}}}.$

Ответ: 15625

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

Вася нарисовал в клетчатой тетради прямоугольник 7 × 8 со сторонами, идущими по линиям сетки. Внутри этого прямоугольника он хочет нарисовать квадрат с вершинами в узлах сетки (при этом стороны могут не быть параллельны сторонам исходного прямоугольника). Сколько различных вариантов площадей таких квадратов может получить Вася?

Ответ: 18

Точное совпадение ответа — 1 балл

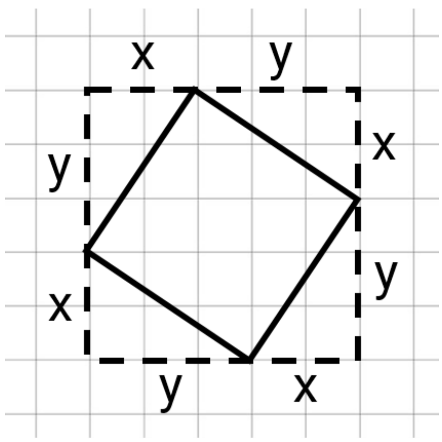
Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Обозначим вершины исходного прямоугольника как O, Y, A, X (по часовой стрелке, начиная с левой нижней) и зададим систему координат с началом в точке O и осями, параллельными сторонам прямоугольника.

Очевидно, внутри него есть только 7 разных квадратов со сторонами, идущими по линиям сетки.

Теперь рассмотрим квадраты, идущие не по линиям сетки. Проведём через нижнюю и правую вершины квадрата горизонтальные и вертикальные линии сетки (см. рисунок), получим прямоугольный треугольник с целыми сторонами x и y.



Заметим, что $x + y \leq 7$ по рисунку, т.к. иначе не все вершины поместятся в исходный прямоугольник (сам наклонный квадрат вписывается в квадрат со сторонами, идущими по линиям сетки и равными $x + y$).

Также заметим, что площадь таких квадратов равна $x^2 + y^2$.

Тогда нам подходят следующие пары чисел x и y (без ограничения общности будем считать $x \leq y$):

(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 3), (3; 4).

Их площади соответственно равны:

2; 5; 10; 17; 26; 37; 8; 13; 20; 29; 18; 25.

Заметим, что площадь последнего квадрата совпадает с площадью квадрата 5×5 со сторонами, идущими параллельно линиям сетки. Поэтому из 12 «наклонных» квадратов уникальными площадями будут обладать только 11.

Итого квадратов с разными площадями: $7 + 11 = 18$.

Задание № 3.2

Условие:

Вася нарисовал в клетчатой тетради квадрат 7 × 7 со сторонами, идущими по линиям сетки. Внутри этого квадрата он хочет нарисовать другой квадрат с вершинами в узлах сетки (при этом стороны могут не быть параллельны сторонам исходного квадрата). Сколько различных вариантов площадей таких квадратов может получить Вася? Квадрат 7 × 7 в ответе не учитывать.

Ответ: 17

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

Вася нарисовал в клетчатой тетради квадрат 8 × 8 со сторонами, идущими по линиям сетки. Внутри этого квадрата он хочет нарисовать другой квадрат с вершинами в узлах сетки (при этом стороны могут не быть параллельны сторонам исходного квадрата). Сколько различных вариантов площадей таких квадратов может получить Вася? Квадрат 8 × 8 в ответе не учитывать.

Ответ: 22

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

Вася нарисовал в клетчатой тетради прямоугольник 9×8 со сторонами, идущими по линиям сетки. Внутри этого прямоугольника он хочет нарисовать квадрат с вершинами в узлах сетки (при этом стороны могут не быть параллельны сторонам исходного прямоугольника). Сколько различных вариантов площадей таких квадратов может получить Вася?

Ответ: 23

Точное совпадение ответа — 1 балл

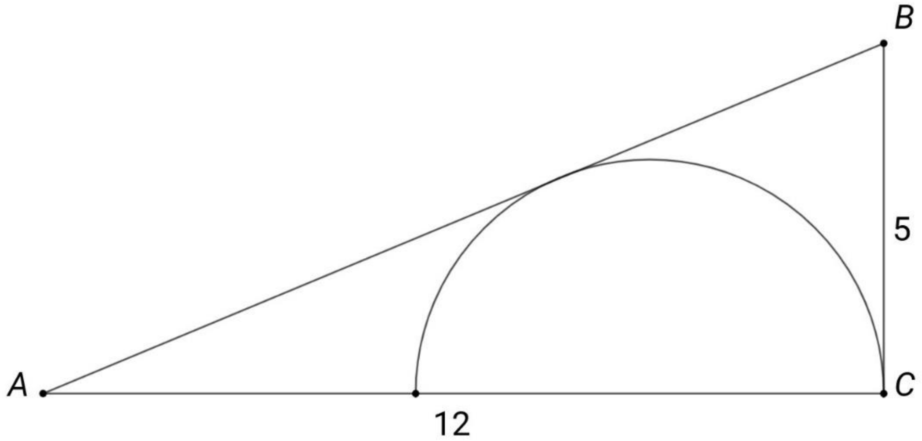
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

В прямоугольный треугольник ABC со сторонами AC = 12, BC = 5 вписана полуокружность так, как показано на рисунке. Центр полуокружности лежит на стороне AC, полуокружность касается сторон AB и BC.



Найдите расстояние от точки A до точки касания на AB.

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

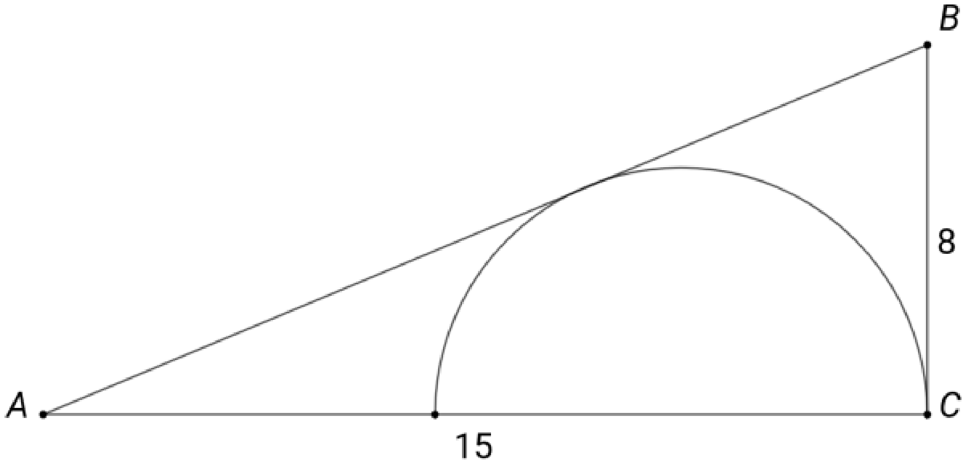
Точку касания стороны AB обозначим M.

Тогда BM = BC, т.к. C — точка касания прямой BC с полуокружностью, так как она перпендикулярна радиусу с концом в точке C. Отсюда BM = 5. Заметим, что AB = 13 по теореме Пифагора. Тогда искомое расстояние AM = AB − BM = 8.

Задание № 4.2

Условие:

В прямоугольный треугольник ABC со сторонами AC = 15, BC = 8 вписана полуокружность так, как показано на рисунке. Центр полуокружности лежит на стороне AC, полуокружность касается сторон AB и BC.



Найдите расстояние от точки A до точки касания на AB.

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

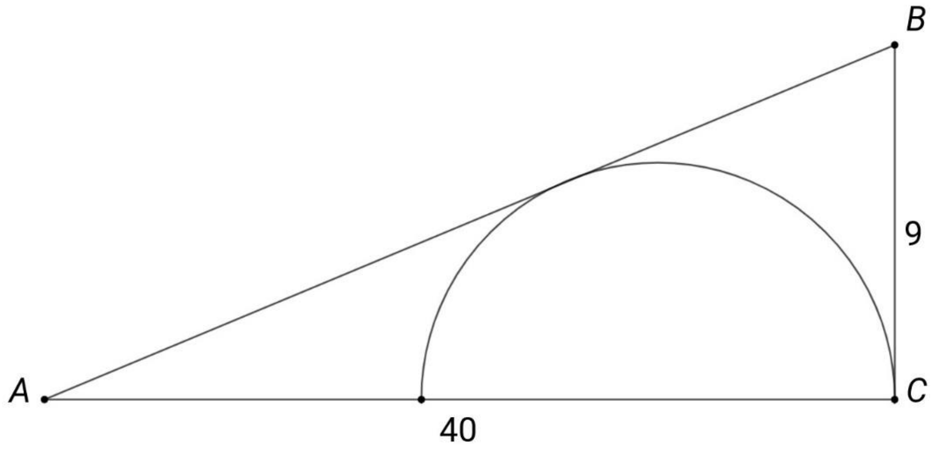
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

В прямоугольный треугольник ABC со сторонами AC = 40, BC = 9 вписана полуокружность так, как показано на рисунке. Центр полуокружности лежит на стороне AC, полуокружность касается сторон AB и BC.



Найдите расстояние от точки A до точки касания на AB.

Ответ: 32

Точное совпадение ответа — 1 балл

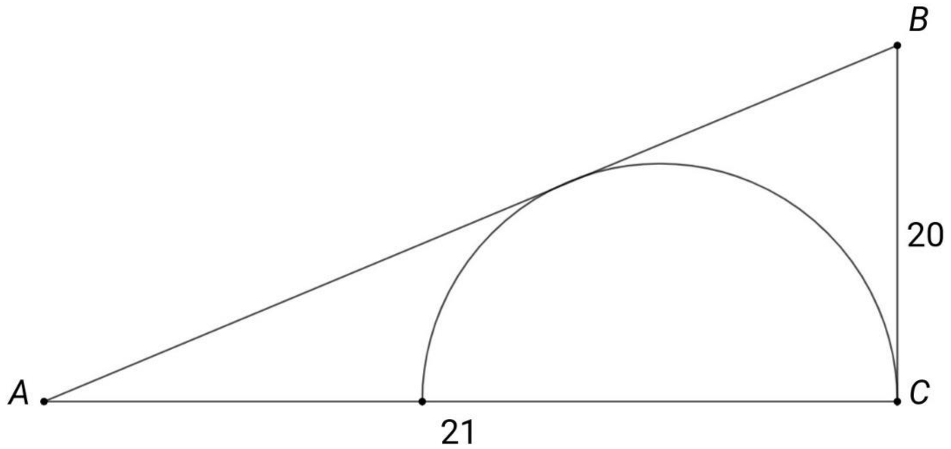
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

В прямоугольный треугольник ABC со сторонами AC = 21, BC = 20 вписана полуокружность так, как показано на рисунке. Центр полуокружности лежит на стороне AC, полуокружность касается сторон AB и BC.



Найдите расстояние от точки A до точки касания на AB.

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

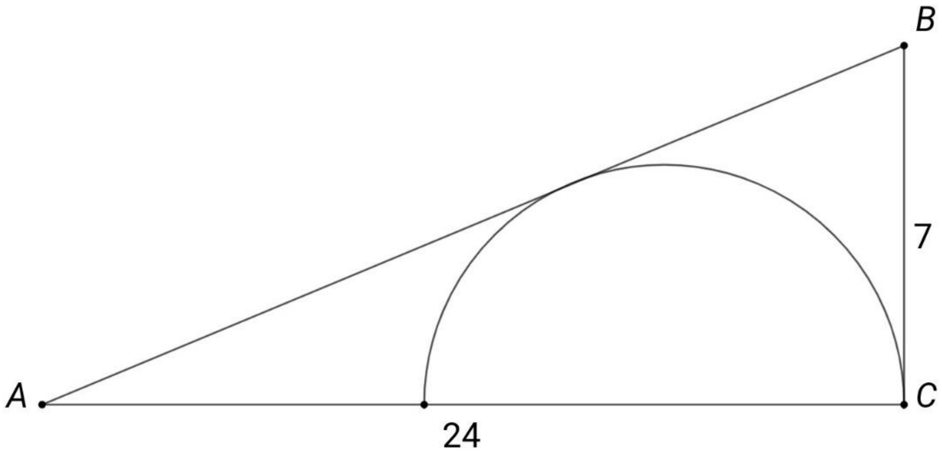
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.5

Условие:

В прямоугольный треугольник ABC со сторонами AC = 24, BC = 7 вписана полуокружность так, как показано на рисунке. Центр полуокружности лежит на стороне AC, полуокружность касается сторон AB и BC.



Найдите расстояние от точки A до точки касания на AB.

Ответ: 18

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

На олимпиаде были предложены 4 задачи, каждая из которых оценивалась в 0, 1, 2 или 3 балла. Оказалось, что среди участников нет таких, которые набрали бы одинаковое число баллов хотя бы по двум задачам.

Какое наибольшее количество участников могло быть на олимпиаде?

Ответ: 16

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что не более 4 студентов могло набрать 0 баллов по первой задаче, так как у них должны быть различными баллы по всем остальным задачам. Но тогда студентов — не более 16. 16 человек возможно, см. таблицу:

0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
0	1	2	3
0	2	3	1
0	3	1	2
1	0	3	2
1	3	2	0
1	2	0	3

2	3	0	1
2	0	1	3
2	1	3	0
3	2	1	0
3	1	0	2
3	0	2	1

В примере пустые строчки добавлены для наглядности. Понятно, что после первых четырёх строчек далее ни в какой строчке не могут встретиться две одинаковые цифры. Соответственно, в группе-строчке, начинающейся с 0, идёт квадрат 3×3, где цифры 1, 2, 3 стоят в правильной ладейной расстановке, и аналогично далее.

Задание № 5.2

Условие:

На олимпиаде были предложены 3 задачи, каждая из которых оценивалась в 0, 1 или 2 балла. Оказалось, что среди участников нет таких, которые набрали бы одинаковое число баллов хотя бы по двум задачам.

Какое наибольшее количество участников могло быть на олимпиаде?

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

На олимпиаде были предложены 3 задачи, каждая из которых оценивалась в 0, 1, 2 или 3 балла. Оказалось, что среди участников нет таких, которые набрали бы одинаковое число баллов хотя бы по двум задачам.

Какое наибольшее количество участников могло быть на олимпиаде?

Ответ: 16

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

Аня нарисовала на координатной плоскости красным фломастером множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих соотношению $||x| - |y|| = 1$, а Ваня нарисовал синим фломастером стороны квадрата с вершинами в точках $(12; 12)$, $(-12; 12)$, $(12; -12)$, $(-12; -12)$.

Сколько точек были покрашены и в синий, и в красный цвет?

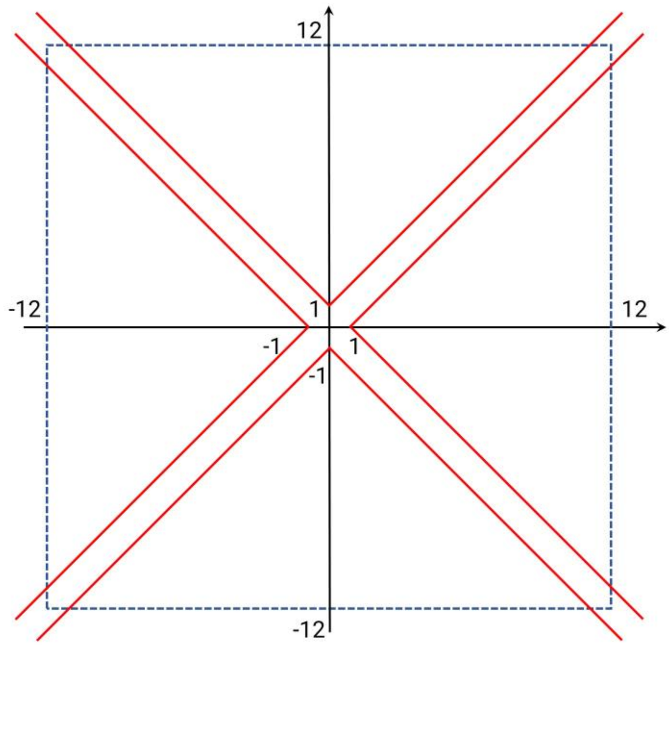
Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

I способ. Можно понять, что Анино множество выглядит как «галочки» (части прямых $y = x \pm 1$ и $y = -x \pm 1$ без их центрального квадрата, а квадрат Вани — большой. Его вершины лежат между двух прямых, значит, каждая сторона пересекает две прямые Ани (см. рисунок):



II способ. В силу симметричности, достаточно решить систему при $x > 0$, $y > 0$ (первая четверть). Тогда получаем, что множество Ани — части прямых $y = x + 1$ и $y = x - 1$, лежащие внутри первой четверти, а множество Вани — это отрезки прямых $y = 12$ (при $0 \le x \le 12$) и $x = 12$ (при $0 \le y \le 12$). Один отрезок пересекает ровно одну прямую.

Задание № 6.2

Условие:

Аня нарисовала на координатной плоскости красным фломастером множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих соотношению $||x| - |y|| = 2$, а Ваня нарисовал синим фломастером стороны квадрата с вершинами в точках $(6; 0)$, $(-6; 0)$, $(0; -6)$, $(0; 6)$. Сколько точек были покрашены и в синий, и в красный цвет?

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

Аня нарисовала на координатной плоскости красным фломастером множество точек (x; y), удовлетворяющих соотношению $||x| - |y|| = 5$, а Ваня нарисовал синим фломастером окружность радиуса 5 с центром в начале координат. Сколько точек были покрашены и в синий, и в красный цвет?

Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

Аня нарисовала на координатной плоскости красным фломастером множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих соотношению $||x| - |y|| = 1$, а Ваня нарисовал синим фломастером параболу $y = x^2 - 1$. Сколько точек были покрашены и в синий, и в красный цвет?

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

Учитель записал на доске четырёхзначное число n и попросил выписать все его натуральные делители в порядке возрастания. Получился ряд 1, 2, 4, 5, …, $\frac{n}{2}$, n. В какой-то момент в этом ряду встретилось число 323. Какое число выписано сразу за ним?

Ответ: 340

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что n кратно 17 и 19 (поскольку $323 = 17 \cdot 19$). Также оно кратно 4 и 5. Все эти числа попарно взаимно простые, поэтому n кратно их произведению. Тогда $n = 4 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot x = 6460 \cdot x$, где x — натуральное число. Если $x > 1$, то $n > 10000$ и не является четырёхзначным. Значит, $x = 1$ и $n = 6460$.

Заметим, что в записанном ряду есть число $340 = 4 \cdot 5 \cdot 17$. Поскольку между числом 323 и ним нет ни одного кратного ни 17, ни 19 (очевидно), то выписанные делители n на этом промежутке не превышают $n \div 323 = 20$, откуда ясно, что между 323 и 340 выписанных чисел нет.

Задание № 7.2

Условие:

Учитель записал на доске четырёхзначное число n и попросил выписать все его натуральные делители в порядке возрастания. Получился ряд 1, 2, 3, 5, …, $\frac{n}{2}$, n. В какой-то момент в этом ряду встретилось число 323. Какое число выписано непосредственно перед ним?

Ответ: 285

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

Учитель записал на доске четырёхзначное число n и попросил выписать все его натуральные делители в порядке возрастания. Получился ряд 1, 2, 4, 5, …, $\frac{n}{2}$, n. В какой-то момент в этом ряду встретилось число 391. Какое число выписано сразу за ним?

Ответ: 460

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

Учитель записал на доске четырёхзначное число n и попросил выписать все его натуральные делители в порядке возрастания. Получился ряд 1, 2, 4, 5, …, $\frac{n}{2}$, n. В какой-то момент в этом ряду встретилось число 391. Какое число выписано непосредственно перед ним?

Ответ: 340

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Есть доска 11 × 5. Мотя красит каждую клетку в один из трёх цветов — белый, красный или синий. Когда Мотя закончит, Вова может найти любую одноцветную пару клеток, имеющих общую сторону или вершину, и перекрасить эту пару клеток в зелёный цвет (и так делать до тех пор, пока это возможно). Мотя платит Вове по 10 рублей за каждую зелёную клетку. Сколько денег может гарантированно получить Вова?

Ответ: 200

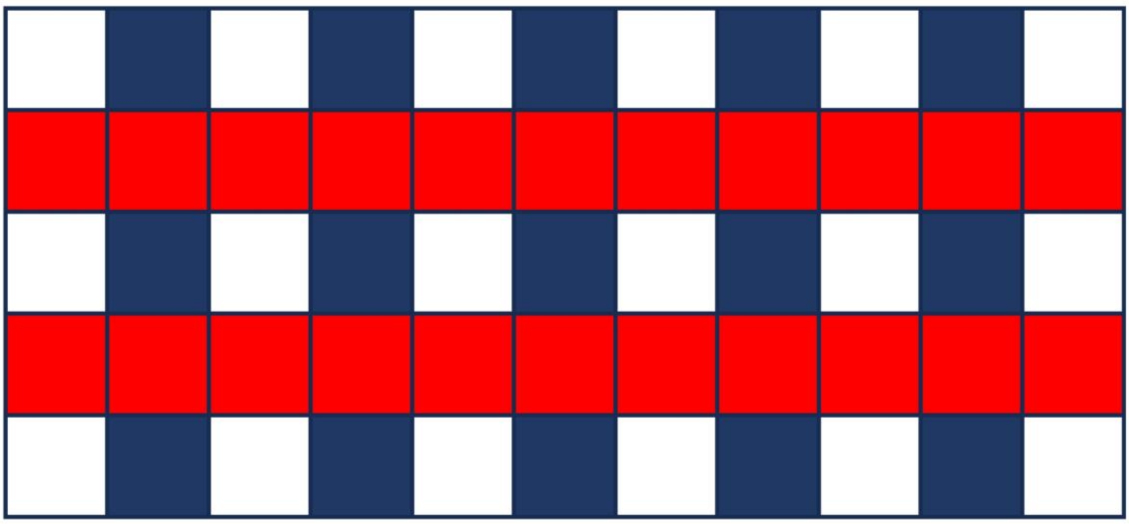
Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

В любом квадрате 2 × 2 найдётся пара одноцветных клеток, следовательно, Вова сможет их закрасить в зелёный. На доске 11 × 5 мы можем выделить 10 различных квадратиков 2 × 2 (начиная, например, с левого верхнего угла), а значит, Вова сможет закрасить 20 клеток и гарантировать выигрыш в 200 рублей.

Осталось привести пример, в котором больше 200 рублей получить не удастся.



Заметим, что в данном примере Вова сможет закрасить только красные клетки, причём находящиеся в одной полоске. В каждой из двух полосок 11 клеток, из них Вова закрасит не более 10, то есть всего он закрасит не более 20 клеток.

Задание № 8.2

Условие:

Есть доска 15×5. Мотя красит каждую клетку в один из трёх цветов — белый, красный или синий. Когда Мотя закончит, Вова может найти любую одноцветную пару клеток, имеющих общую сторону или вершину, и перекрасить эту пару клеток в зелёный цвет (и так делать до тех пор, пока это возможно). Мотя платит Вове по 20 рублей за каждую зелёную клетку. Сколько денег может гарантированно получить Вова?

Ответ: 560

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Есть доска 13 × 7. Мотя красит каждую клетку в один из трёх цветов — белый, красный или синий. Когда Мотя закончит, Вова может найти любую одноцветную пару клеток, имеющих общую сторону или вершину, и перекрасить эту пару клеток в зелёный цвет (и так делать до тех пор, пока это возможно). Мотя платит Вове по 15 рублей за каждую зелёную клетку. Сколько денег может гарантированно получить Вова?

Ответ: 540

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Есть доска 17 × 7. Мотя красит каждую клетку в один из трёх цветов — белый, красный или синий. Когда Мотя закончит, Вова может найти любую одноцветную пару клеток, имеющих общую сторону или вершину, и перекрасить эту пару клеток в зелёный цвет (и так делать до тех пор, пока это возможно). Мотя платит Вове по 7 рублей за каждую зелёную клетку. Сколько денег может гарантированно получить Вова?

Ответ: 336

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.5

Условие:

Есть доска 15 × 9. Мотя красит каждую клетку в один из трёх цветов — белый, красный или синий. Когда Мотя закончит, Вова может найти любую одноцветную пару клеток, имеющих общую сторону или вершину, и перекрасить эту пару клеток в зелёный цвет (и так делать до тех пор, пока это возможно). Мотя платит Вове по 5 рублей за каждую зелёную клетку. Сколько денег может гарантированно получить Вова?

Ответ: 280

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1